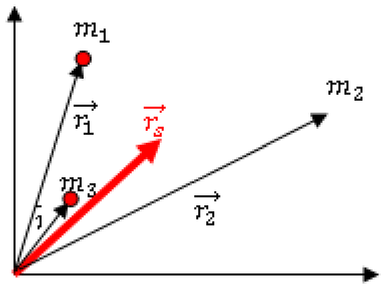
ĆWICZENIE 1	**WYZNACZANIE MOMENTU BEZWŁADNOŚCI CIAŁ METODĄ WAHADŁA FIZYCZNEGO GRAWITACYJNEGO I SPRAWDZANIE TWIERDZENIA STEINERA**

Cel ćwiczenia: Doświadczalne potwierdzenie twierdzenia Steinera, wyznaczenie momentu bezwładności różnych brył względem osi środkowych

Zagadnienia: Dynamika bryły sztywnej, twierdzenie Steinera, wahadło fizyczne

1 Wprowadzenie:

Celem tego ćwiczenia jest doświadczalne wyznaczenie **momentu bezwładności** ciała oraz eksperymentalne potwierdzenie słuszności **twierdzenia Steinera**. Nim jednak przejdziemy do opisu doświadczenia musimy zapoznać się z kilkoma zagadnieniami dotyczącymi dynamiki szczególnego przypadku układu punktów materialnych jakim jest **bryła sztywna**. Pod pojęciem bryły sztywnej rozumiemy ciało, które nie ulega odkształceniom pod wpływem działających sił. Inaczej mówiąc odległości pomiędzy poszczególnymi punktami materialnymi tworzącymi ciało są niezmienne. Oczywiście ciała rzeczywiste są tylko mniej lub bardziej zbliżone do wyidealizowanego pojęcia bryły sztywnej, np. stal i drewno odkształcaj się w znikomym stopniu pod wpływem zewnętrznych sił, w tym samym czasie galaretka odkształca się już pod wpływem znikomej siły.



Rys. 1 Przykładowe położenie środka ciężkości dla trzech różnych mas

Dowolny ruch bryły sztywnej można rozłożyć na dwa rodzaje ruchu: **ruch postępowy** i **obrotowy**. Ruchem postępowym bryły sztywnej nazywamy ruch w którym w dowolnej chwili czasu odcinek łączący dwa dowolne punkty bryły sztywnej pozostaje równoległy do siebie w różnych chwilach czasu. W ruchu postępowym bryły sztywnej wszystkie punkty tworzące tę bryłę poruszają się z taką samą prędkością i przyspieszeniem, dlatego też ruch postępowy można sprowadzić do ruchu **środka masy** bryły. Środek masy bryły definiuje się jako:

$$\vec{r_s} = \frac{\sum m_i \vec{r_i}}{\sum m_i} \qquad (1)$$

W przypadku jednorodnych brył środek masy jest ich środkiem geometrycznym. Środek masy ma tę własność, że (w wypadku ruchu postępowego) porusza się tak jak punkt materialny o masie całkowitej układu, na który działa siła będąca wypadkową sił zewnętrznych.

Ruch obrotowy bryły sztywnej charakteryzuje się tym, że wszystkie punkty bryły poruszają się po okręgach, których środki leżą na jednej prostej. Prostą tą nazywamy osią obrotu. Poszczególne punkty bryły charakteryzują się tą samą prędkością kątową i przyspieszeniem kątowym, równocześnie prędkości liniowe poszczególnych punktów bryły są różne i zależą od odległości od osi obrotu R, prędkość liniowa v poszczególnych punktów opisana jest zależnością $v = \omega R$ gdzie ω to prędkość kątowa.

To w jaki sposób poruszać się będzie ciało pod wpływem przyłożonej siły opisuje druga zasada dynamiki, w przypadku ruchu postępowego wyrażona jest ona poprzez następujące równanie

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad (2)$$

gdzie $\vec{a}$ jest przyśpieszeniem liniowym ciała o masie m a $\vec{F}$wypadkową siłą działającą na to ciało. W przeciwieństwie do 2 zasady dynamiki dla punktu materialnego, napisanie tej zasady dynamiki dla bryły sztywnej w przypadku ogólnym nie jest proste. Ograniczając się do przypadku, gdy oś obrotu nie porusza się możemy zapisać 2 zasadę dynamiki w postaci:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M} \tag{3}$$

gdzie I jest momentem bezwładności, $\vec{\varepsilon}$ przyśpieszeniem kątowym a $\vec{M}$ momentem siły. Moment siły jest analogiem siły w ruchu postępowym, mówi nam on o tym z jakim przyśpieszeniem kątowym będzie poruszała się bryła sztywna o określonym momencie bezwładności. **Moment siły definiujemy jako iloczyn wektorowy wektora wodzącego $\vec{r}$ od osi obrotu do punktu przyłożenia siły $\vec{F}$ i tej siły:**

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{4}$$

Z definicji iloczynu wektorowego wartość momentu siły jest równa iloczynowi długości wektora $\vec{r}$ i $\vec{F}$ oraz sinusa kąta pomiędzy nim

$$|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin(\theta) \tag{5}$$

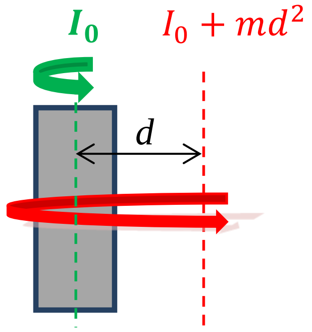
Wektor momentu bezwładności jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{r}$ i $\vec{F}$. **Moment bezwładności opisuje rozmieszczenie masy wokół osi obrotu. Definiuje się go jako sumę iloczynów mas poszczególnych punktów bryły (m_i) i kwadratów odległości od danej osi (r_i)**:

$$I = \sum m_i r_i^2 \tag{6}$$

Sens fizyczny momentu bezwładności jest analogiczny do sensu fizycznego masy i informuje nas o bezwładności ciała czyli o tym jak „trudno zmienić jego ruch obrotowy" czyli nadać określone przyśpieszenie kątowe (przyśpieszenie kątowe jest odwrotnie proporcjonalne do momentu bezwładności). Należy zauważyć, że o ile w przypadku ruchu postępowego bezwładność zależy tylko od całkowitej masy ciała, to w przypadku ruchu obrotowego odpowiednikiem bezwładności jest moment bezwładności, który zależy również od rozmieszczenia masy wokół osi obrotu. Momenty bezwładności dwóch ciał o tej samej masie ale różnych wymiarach przestrzennych mogą być zupełnie różne. Równocześnie zmieniając oś obrotu wokół której obraca się ciało zmieniamy jego moment bezwładności. W tabeli poniżej zaprezentowane są wartości momentu bezwładności kilku brył **o jednorodnym rozkładzie masy** względem wybranych osi symetrii przechodzących przez środek masy:

Bryła	Rodzaj osi	Moment bezwładności
Kula o promieniu R	Oś przechodząca przez środek	$\frac{2}{5}mR^2$
Walec o promieniu R	Podłużna oś symetrii	$\frac{1}{2}mR^2$
Pręt o długość l	Oś prostopadła do pręta przechodząca przez jego środek	$\frac{1}{12}ml^2$
Obręcz o promieniu R	Oś prostopadła do płaszczyzny obręczy przechodząca przez jej środek	mR^2
Wydrążony walec o promieniu R_w i R_z	Podłużna oś symetrii	$\frac{1}{2}m(R_z^2 + R_w^2)$

Jak to już zostało wspominanie moment bezwładności danej bryły sztywnej zależy od wyboru osi obrotu. Przy obliczaniu momentu bezwładności względem niektórych osi obrotu pomocne jest **twierdzenie Steinera: Moment bezwładności I bryły względem dowolnej osi obrotu równoległej do osi obrotu przechodzącej przez środek masy ciała jest równy sumie momentu bezwładności I_0 względem osi obrotu przechodzącej przez środek masy oraz iloczynu masy m tej bryły i kwadratu odległości d pomiędzy osiami obrotu:**

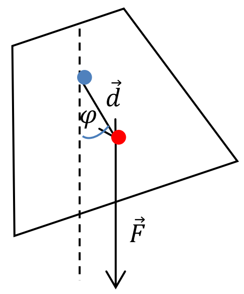


Rys.2 Ilustracja twierdzenie Steinera gdy ciało obraca się wokół swojej osi symetrii (zielona linia przerywana) oraz osi oddalonej od niej o d (kolor czerwony).

$$\boldsymbol{I = I_0 + md^2} \tag{7}$$

2 Zasada pomiaru i układ pomiarowy

O ile w przypadku prostych brył sztywnych moment bezwładności można wyliczyć z definicji to w przypadku bardziej skomplikowanych kształtów i ciał niejednorodnych zadanie to staje się problematyczne. Wówczas pozostaje eksperymentalne wyznaczenie momentu bezwładności bryły. Jedną z metod wyznaczania momentu bezwładności ciała jest pomiar okresu drgań wahadła fizycznego - czyli ciała wahającego się wokół osi nie przechodzącej przez środek masy ciał. Jak to za chwilę pokażemy okres drgań wahadła jest bezpośrednio związany z jego momentem bezwładności. Rysunek poniżej przedstawia wahadło fizyczne obracające się wokół osi (niebieska kropka) oddalonej o wektor $\vec{d}$ od środka masy. Siła ciężkości przyłożone jest w środku masy. Środek masy, oznaczony czerwoną kropką, wychylony jest o kąt φ od położenia równowagi. Na wahadło działa siła ciężkości $\vec{F} = m\vec{g}$ skierowana w dół. Z siłą tą związany jest moment siły $\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}$, który stara się obrócić wahadło w stronę położenia równowagi oraz przeciwnie do wychylenia.



Rys. 3 Schemat wahadła fizycznego, niebieska kropka oznacza oś obrotu, a czerwona środek masy.

Równanie ruchu dla naszego wahadła przyjmie następującą postać:

$$I\vec{\varepsilon} = m\vec{d} \times \vec{g} \tag{8}$$

Równanie to można przekształcić do następującej postaci skalarnej

$$I\varepsilon = -mgd\sin(\varphi) \tag{9}$$

Gdzie, znak minus związany jest z tym że wypadkowy moment siły stara się zawrócić wahadło do położenia równowagi.

Dla małych kątów (np. dla 0.157 rad czyli 9° $\sin(\varphi)$ różni się od φ o mniej niż 0.5%) wówczas można przyjąć że $\sin(\varphi) \approx \varphi$. Pamiętając, że przyśpieszenie kątowe to nic innego jak druga pochodna kąta po czasie możemy równanie (9) zapisać jako:

$$I\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -mgd\varphi \tag{10}$$

Co po drobnych przekształceniach przyjmuje postać równania oscylatora harmonicznego:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} - \frac{mgd}{I}\varphi = 0 \tag{11}$$

Rozwiązaniem tego równania są drgania harmoniczne, których zależność od czasu opisana jest następującą funkcją $\varphi_A \sin(\omega t + \delta)$, gdzie φ_A jest maksymalnym kątem wychylenia wahadła, a δ fazą drgań. Ważną cechą drgań harmonicznych jest to, że okres ich drgań T jest niezależny od amplitudy drgań φ_A ani od fazy początkowej δ. Współczynnik $\frac{mgd}{I}$ w równaniu 12 jest niczym innym jak kwadratem częstości kołowej ($\omega = \frac{2\pi}{T}$), zatem okres drgań T wahadła fizycznego wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{12}$$

Znając masę bryły, odległość środka ciężkości od osi obrotu oraz okres drgań można wyznaczyć moment bezwładności:

$$I = \frac{T^2 mgd}{4\pi^2} \tag{13}$$

Należy zauważyć że stosując tę metodę nie jesteśmy w stanie wyznaczyć momentu bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy gdyż wówczas nasze wahadło nie będzie drgało (d=0 a zatem i moment siły wynosi 0). W takiej sytuacji możemy skorzystać z twierdzenia Steinera i wyliczyć moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy.

Wiemy już jak obliczyć moment bezwładności posługując się wahadłem fizycznym jednakże jednym z celów tego ćwiczenia jest również eksperymentalne potwierdzenie słuszności twierdzenia Steinera. Jeżeli twierdzenie Steinera jest słuszne to moment bezwładności badanej bryły możemy wyrazić jako $I = I_0 + md^2$, a wzór na okres drgań wahadła jako:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + md^2}{mgd}} \tag{14}$$

Podnosząc to równanie stronami do kwadratu i dokonując kilku drobnych przekształceń otrzymujemy następującą zależność:

$$T^2 gd - 4\pi^2 d^2 = \frac{4\pi^2}{m} I_0 \quad = const = C \tag{15}$$

Widać że dla danej bryły wielkość $T^2 gd - 4\pi^2 d^2$ jest stała i nie zależy od wybranej osi obrotu jest to tak zwany niezmiennik wahadła fizycznego. Jeżeli twierdzenie Steinera jest słuszne to wielkość C obliczona dla różnych osi obrotu powinna być jednakowa w granicy niepewności pomiarowej. Równocześnie na podstawie wielkości C możemy wyznaczyć moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek ciężkości:

$$I_0 = \frac{m}{4\pi^2} C \tag{16}$$

Twierdzenie Steinera możemy również potwierdzić w inny sposób, równanie 14 można przekształcić do postaci:

$$d \cdot T^2 = \frac{4\pi^2}{mg} I_0 + \frac{4\pi^2}{g} d^2 \tag{17}$$

Oznaczając $dT^2 = y$, $d^2 = x$, możemy równanie (17) zapisać w postaci równania linii prostej $y = ax + b$ gdzie $a = \frac{4\pi^2}{g}$, a $b = \frac{4\pi^2}{mg} I_0$. Zatem jeżeli twierdzenie Steinera jest słuszne to wykres zależności $d \cdot T^2$ od d^2 powinien być linią prostą. Co więcej współczynnik przecięcia z osią y wynoszący $b = \frac{4\pi^2}{mg} I_0$ pozwala na określenie momentu bezwładności badanej bryły względem osi przechodzącej przez środek masy:

$$I_0 = \frac{bmg}{4\pi^2} \tag{18}$$

Dodatkowo współczynnik kierunkowy a jest bezpośrednio związany z przyśpieszeniem ziemskim i nie zależy od kształtu bryły, co pozwala dodatkowo zweryfikować poprawność pomiarów tudzież słuszność twierdzenia Steinera. Zatem w celu sprawdzenia poprawności twierdzenia Steinera należy przeprowadzić pomiary okresu drgań wahadła fizycznego dla kilku osi obrotu w różnych odległościach od środka ciężkości. Następnie należy wyrysować wykres zależności dT^2 od d^2. Jeżeli wykres ten będzie linią prostą dowodzi to słuszności twierdzenia Steinera. Dodatkowym czynnikiem weryfikującym poprawność teorii i pomiarów będzie wartość współczynnika kierunkowego prostej, który powinien wynosić $\frac{4\pi^2}{g}$ i w ogóle nie zależeć od kształtu bryły. W części A, B i C ćwiczenia należy potwierdzić twierdzenie Steinera na podstawie pomiaru okresu drgań tarczy, obręczy oraz pręta metalowego zawieszonych w różnych odległościach od środka masy oraz wyznaczyć ich moment bezwładności względem środka masy na podstawie niezmiennika drgań wahadła fizycznego. W części dodatkowej dla wybranej bryły należy potwierdzić twierdzenie Steinera oraz wyznaczyć moment bezwładności I_0 na podstawie wykresu zależności 17 w odpowiednim układzie współrzędnych.

3 Zadania do wykonania

Prowadzący wskazuje dla których brył należy wykonać pomiary.

Część A-tarcza z otworami:

a) Określić masę tarczy za pomocą wagi laboratoryjnej
b) Zmierzyć podwojone odległości D_i pomiędzy osiami obrotu na pryzmie a środkiem masy tarczy. Jest to pomiar bezpośredni więc należy wykonać go kilkukrotnie (6-7 razy chyba że prowadzący wskaże inaczej) dla każdej z pary otworów.
c) Zawiesić tarczę na pryzmie na jednym z wybranych otworów, po czym dokonać pomiaru czasu 100 wahnięć. Należy pamiętać aby nie wychylać wahadła o kąt większy niż kilka stopni.
d) Pomiary czasu wahnięć powtórzyć 5 razy.
e) Punktu 3 i 4 powtórzyć dla pozostałych par otworów w tarczy.

Część B-metalowy pierścień:

a) Określić masę *m* pierścienia za pomocą wagi laboratoryjnej.
b) Za pomocą suwmiarki wyznaczyć średnicę *d* wewnętrzną i zewnętrzną *D* pierścienia.
c) Wyznaczyć czas 100 wahnięć pierścienia zawieszonego na pryzmie; pomiar powtórzyć kilkukrotnie.

Cześć C-pręt metalowy:

a) Określić masę pręta za pomocą wagi laboratoryjnej
b) Określić długość pręta l za pomocą suwmiarki (pomiar powtórzyć 6-7 razy)
c) Wyznaczyć odległość osi obrotu d_i od środka masy pręta (pomiary powtórzyć 6-7 razy)
d) Zmierzyć czas 50 wahnięć pręta
e) Pomiar czasu wahnięć powtórzyć 5 krotnie.
f) Punkty 3 - 5 powtórzyć dal 4 innych odległości $d_i$osi obrotu od środka masy

4 Opracowanie wyników:

Sposób opracowania wyników wskazuje prowadzący

Wariant I

Część A (tarcza metalowa):

a) Na podstawie wielokrotnych pomiarów D_1, D_2, D_3… określić niepewność $u(D_1)$, $u(D_2)$, $u(D_3)$...
b) Określić odległość osi obrotu od środka masy $d_i = \frac{D_i}{2}$ oraz jej niepewność$U(d_i) = \frac{1}{2}u(D_i)$
c) Na podstawie pomiarów czasu t 100 wahnięć dla danej osi obrotu obliczyć uśredniony czas $\bar{t}$ 100 wahnięć oraz jego niepewność $u(\bar{t})$. Czas reakcji człowieka można przyjąć na poziomie 0.5s.
   Obliczyć okres drgań wahadła dla poszczególnych osi obrotu $T = \bar{t}/n$ (*n* – liczba wahnięć) oraz jego niepewność korzystając z wzoru na niepewność złożoną, niepewność liczby zliczeń przyjąć *u(n)=1*. potwierdzić zależność okresu drgań wahadła od momentu bezwładności.
d) Obliczyć moment bezwładności tarczy względem określonej osi obrotu korzystając ze wzoru:

$$I_d = \frac{T^2 mgd}{4\pi^2}$$

i jego niepewność $u(I_d)$. Obliczenia przeprowadzić dla wszystkich odległości d.

e) Potwierdzić twierdzenie Steinera, w tym celu należy sprawdzić czy wyrażenie $T^2gd - 4\pi^2d^2 = C$ jest stałe dla wszystkich osi obrotu w granicy niepewności pomiarowej

f) Obliczyć momenty bezwładności względem środkowej osi obrotu na podstawie wartości współczynnika C oraz określić jego niepewność.

$$I_0 = \frac{m}{4\pi^2}C$$

g) Obliczyć moment bezwładności względem środkowej osi obrotu na podstawie twierdzenie Steinera dla poszczególnych osi obrotu oraz określić jego niepewność

$$I_0 = I_d - md^2$$

h) Porównać uzyskane I_0 obliczone przy wykorzystaniu dwóch metod

Część B (pierścień metalowy):

a) Obliczyć średni czas t dla 100 wahnięć i średni okres T oraz ich niepewności.

b) Obliczyć moment bezwładności I_d pierścienia względem osi obrotu i jego niepewność.

c) Korzystając z twierdzenia Steinera, wyznaczyć moment bezwładności I_o pierścienia względem osi przechodzącej przez środek masy i jego niepewność.

d) Obliczyć moment bezwładności I_o (tab. $I_{o.st}$) pierścienia względem osi środkowej na podstawie wzoru tablicowego:

$$I_{0.st} = \frac{1}{8}m(d^2 + D^2)$$

oraz obliczyć jego niepewność.

e) Porównać wartości momentu bezwładności I_o obliczone metodą dynamiczną i statyczną.

Część C (pręt metalowy):

a) Obliczyć niepewności pomiarowe długości pręta $u(l)$ oraz niepewności odległości $u(d)$ dla poszczególnych osi obrotu od środka masy.

b) Na podstawie pomiarów czasu t 50 wahnięć dla danej osi obrotu obliczyć uśredniony czas $\bar{t}$ 50 wahnięć oraz jego niepewność$u(\bar{t})$. Czas reakcji człowieka można przyjąć na poziomie 0.5s.

c) Obliczyć okres drgań wahadła dla danej osi obrotu $T = \bar{t}/n$ (n – liczba wahnięć) oraz jego niepewność korzystając z wzoru na niepewność złożoną, niepewność liczby zliczeń przyjąć $u(n)=1$. Potwierdzić zależność okresu drgań wahadła od odległości osi obrotu od środka ciężkości

d) Obliczyć moment bezwładności pręta względem określonej osi obrotu i jego niepewność $u_c(I_d)$. Obliczenia przeprowadzić dla wszystkich odległości d.

e) Potwierdzić twierdzenie Steinera, w tym celu należy sprawdzić czy wyrażenie $T^2gd - 4\pi^2d^2 = C$ jest stałe dla wszystkich osi obrotu w granicy niepewności pomiarowej

f) Obliczyć momenty bezwładności względem środkowej osi obrotu na podstawie wartości współczynnika C oraz określić jego niepewność.

$$I_0 = \frac{m}{4\pi^2}C$$

g) Obliczyć moment bezwładności względem środkowej osi obrotu na podstawie wyników uzyskanych dla poszczególnych osi obrotu oraz określić jego niepewność

$$I_0 = I_d - md^2$$

h) Porównać uzyskane I_0 obliczone przy wykorzystaniu dwóch metod oraz porównać wynik z przewidywaniami teoretycznymi

$$I_{ot} = \frac{1}{12}ml^2$$

Wariant II (tarcza metalowa, pręt metalowy)

a) W zależności od wybranej bryły wykonać czynności opisane w punktach a-d lub a-c (w części A lub C opracowania wyników).
b) Sporządzić wykres (punktowy) zależności T^2d od d^2 wraz z polami niepewności.
c) Znaleźć równanie prostej najlepszego dopasowania T^2d od d^2 przy pomocy metody regresji liniowej. Wyznaczyć współczynniki a i b prostej $y = ax + b$ oraz ich niepewność
d) Na podstawie współczynnika kierunkowego prostej wyznaczyć przyśpieszenie ziemskie $g = \frac{4\pi^2}{a}$ oraz określić jego niepewność. Sprawdzić czy wyznaczone przyśpieszenie ziemskie w granicy niepewności pomiarowej zgadza się z tablicową wartością. $u(a)$ wyznaczyć na podstawie regresji liniowej.
e) Obliczyć moment bezwładność ciała I_o względem środka masy układu na podstawie współczynnika b równania dopasowanej prostej, $I_0 = \frac{bmg}{4\pi^2}$, oraz jego niepewność.

4 Pytania:

- Podaj definicję bryły sztywnej
- Podaj drugą zasadę dynamiki dla bryły sztywnej
- Podaj twierdzenie Steinera
- Opisz jak zależy okres drgań wahadła fizycznego od odległości osi obrotu od środka ciężkości oraz bezwładności wahadła.

Opracował M.Baranowski