ĆWICZENIE 2	WYZNACZANIE PRZYSPIESZENIA ZIEMSKIEGO ZA POMOCĄ WAHADŁA REWERSYJNEGO

Opis ćwiczenia

Cel ćwiczenia

Poznanie budowy i zrozumienie istoty pomiaru przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła rewersyjnego Henry'ego Katera.

Zagadnienia

Ruch harmoniczny, dynamika ruchu obrotowego bryły sztywnej, moment bezwładności, środek masy ciała, twierdzenie Steinera, moment siły.

1 Wstęp

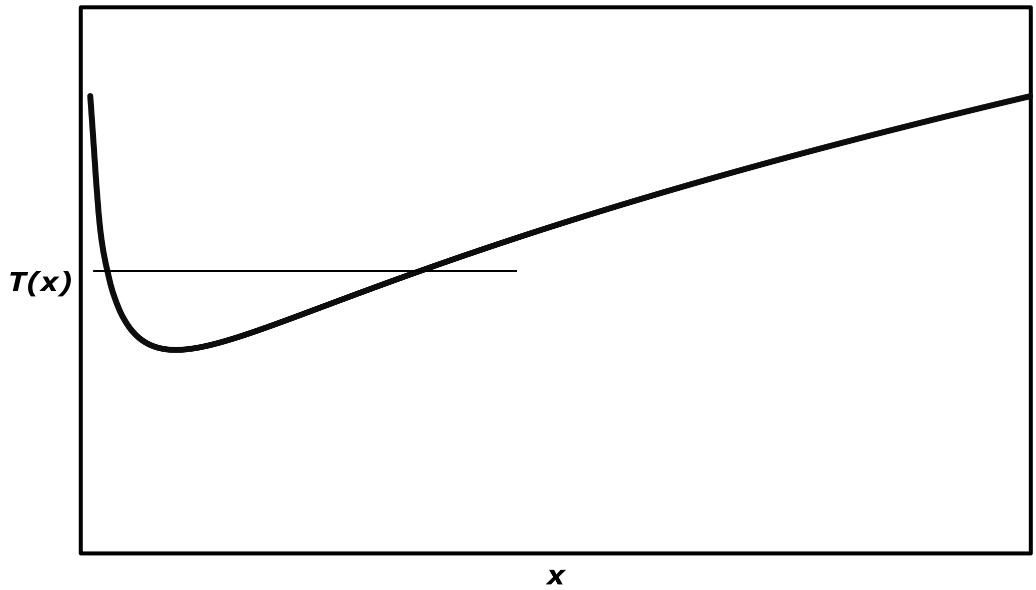
Jedną z najpopularniejszych metod szybkiego wyznaczania przyspieszenia ziemskiego jest pomiar związany z obserwacją ruchu wahadła matematycznego. Przy założeniu małych kątów wychylenia obserwowany okres ruchu takiego wahadła T zależy jedynie od jego długości l oraz od wartości lokalnego przyspieszenia ziemskiego g:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1}$$

Przeprowadzone tym sposobem pomiary nie są jednak zbyt dokładne z następujących powodów. Wahadło to najczęściej kulka zawieszona na nici. Zarówno rozmiary kulki jak i masa nici nie mogą być pominięte co powoduje powstawanie trudno redukowalnych błędów systematycznych.
Właściwie każde rzeczywiste wahadło należy traktować jako wahadło fizyczne, którego ruch drgający jest konsekwencją występowania momentu siły grawitacyjnej przy odchyleniu z położenia równowagi ciała i jego momentu bezwładności. Rozwiązanie równania ruchu takiego układu prowadzi do następującego wyniku na okres drgań $T(x)$

$$T(x) = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0+mx^2}{mgx}} \tag{2}$$

gdzie: m to masa wahadła, x jest odległością osi obrotu od środka masy wahadła, $I = I_0 + mx^2$ jest momentem bezwładności względem danej osi (tw. Steinera) natomiast I_0 to moment bezwładności względem środka masy.
Przeanalizujmy to rozwiązanie wykreślając zależność okresu drgań od odległości osi obrotu od środka masy wahadła. Jak widać na rysunku 1. okres drgań wykazuje minimum przy pewnej odległości. Przy dalszym zmniejszaniu odległości okres rośnie ze względu na szybkie malenie momentu siły ciężkości, natomiast dla wzrostu odległości rośnie ze względu na szybszy wzrost momentu bezwładności. Można więc znaleźć dwie różne odległości osi obrotu od ośrodka masy, przy których okresy drgań są takie same.



Rys. 1. Typowy wykres zależności okresu drgań w funkcji odległości osi obrotu od środka masy wahadła fizycznego. Dla różnych odległości mogą wystąpić te same okresy drgań.

Może się wydawać, że badanie wahadła fizycznego skomplikuje pomiar ze względu na konieczność wyznaczenia momentu bezwładności oraz środka masy ciała. Okazuje się, ze poprzez odpowiednią metodologię pomiaru można te wielkości zredukować.

Na początek przedstawmy równania na jednakowe okresy drgań przy różnych odległościach x_1 i x_2 i wyliczmy z nich moment bezwładności wahadła względem środka masy

$$T = T(x_1) = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + mx_1^2}{mgx_1}} \rightarrow I_0 = \frac{T^2}{4\pi^2} mgx_1 - mx_1^2 \qquad (3)$$

$$T = T(x_2) = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + mx_2^2}{mgx_2}} \rightarrow I_0 = \frac{T^2}{4\pi^2} mgx_2 - mx_2^2 \qquad (4)$$

Porównując moment bezwładności względem środka obliczony dla różnych wartości x otrzymujemy poniższe zależności

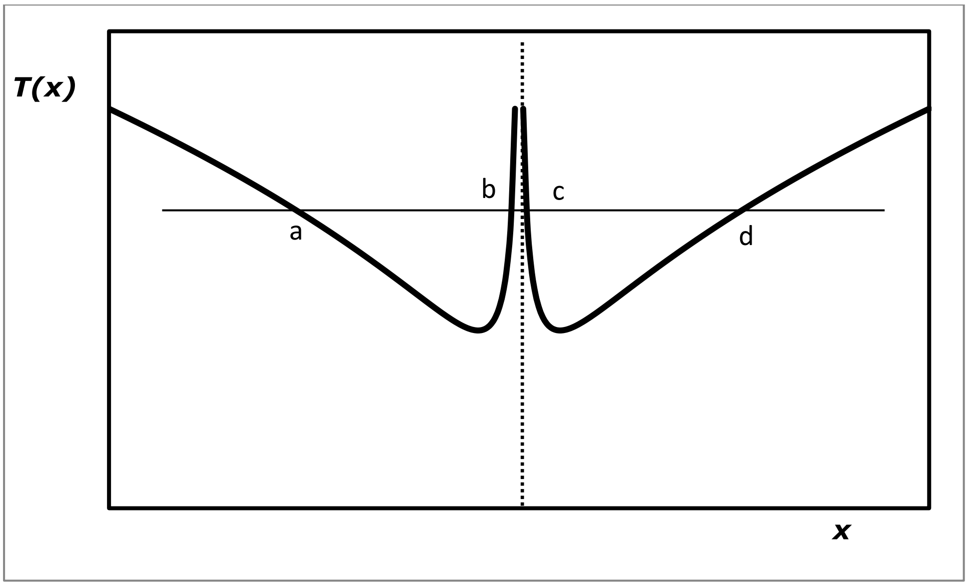
$$\frac{T^2}{4\pi^2} mgx_2 - mx_2^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} mgx_1 - mx_1^2 \quad /m \qquad (5)$$

$$\frac{T^2}{4\pi^2} g(x_2 - x_1) = x_2^2 - x_1^2 \qquad (6)$$

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}(x_2 + x_1) \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{x_2 + x_1}{g}} \qquad (7)$$

Jak widać zarówna masa wahadła jak i jego moment bezwładności zostały zredukowane, a otrzymane równanie po ostatnim przekształceniu przypomina to na okres wahadła matematycznego gdy $x_2 + x_1 = l_{zredukowane}$ (równanie (1)). Z tego powodu tę ostatnią wielkość nazywamy długością zredukowaną wahadła fizycznego. Idealne wahadło matematyczne przy tej długości ma dokładnie ten sam okres drgań co wahadło fizyczne dla punków zawieszenia x_1 i x_2.

Pozostał jeszcze problem położenia środka masy od którego należy mierzyć odległości x_1 i x_2. Okazuje się, że i tego pomiaru można uniknąć. Aby zrozumieć metodę rozszerzmy oś rysunku 1 na wartości x znajdujące się także z drugiej strony środka masy wahadła fizycznego. Odpowiada to zawieszeniu wahadła do góry nogami na drugiej parze ostrzy (drugiej osi obrotu). Rys. 2. Pokazuje zmiany okresu drgań dla takiej sytuacji.



Rys. 2. Okres drgań po obu stronach środka masy zaznaczonego linią przerywaną. Punktami a, b, c, d oznaczono cztery punkty kiedy okres drgań jest jednakowy. Dla osi przechodzącej przez środek masy okres rośnie do nieskończoności. Linia przerywana zaznacza położenie środka masy

Na podstawie powyższego rysunku można zorientować się, że aby wyznaczyć poprawnie przyspieszenie grawitacyjne należy wybrać odpowiednie pary punktów (a,c) lub (b,d).
Wybór pary punktów np.(a,d) lub (b,c) nie prowadzi do poprawnego rozwiązania.

Zmodyfikowane równanie pozwalające obliczyć przyspieszenie grawitacyjne przyjmie więc postać:

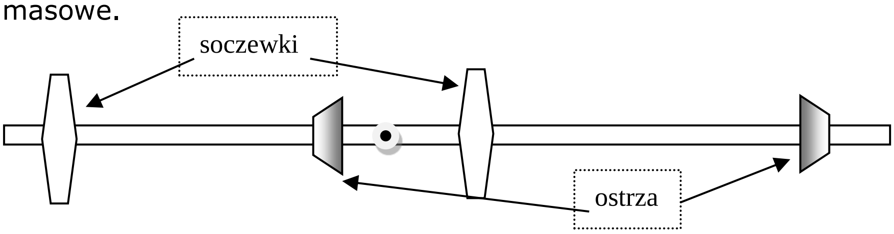
$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}(x_c - x_a) \qquad (8)$$

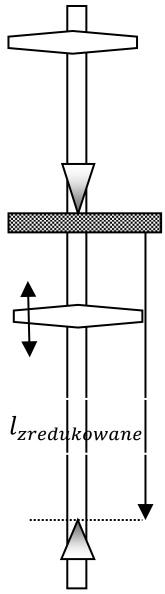
lub

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}(x_d - x_b) \qquad (9)$$

2 Zasada pomiaru, układ pomiarowy i uwagi co do sposobu przeprowadzenia pomiarów

1) Na pręcie stanowiącym bazę wahadła fizycznego rozmieścić niesymetrycznie soczewki masowe.





2) Określi orientacyjnie lokalizację środka masy całego wahadła (czarny punkt na powyższym rysunku.
3) Ostrza stanowiące oś obrotu umieścić zwrócone ku sobie jedno blisko środka masy, drugie po przeciwnej stronie w większej odległości.
4) Dokładnie zmierzyć odległość pomiędzy zablokowanymi ostrzami.
5) Zawiesić wahadło pionowo na jednym z ostrzy jak na rysunku obok.
6) Ponieważ trudno reguluje się położenie ostrzy lepiej pozostawić je nieruchome a równość okresów drgań uzyskiwać poprzez przesuwanie jednej z soczewek czyli przez zmienianie położenia środka masy.

Pomiar:

7) Zmierzyć precyzyjnie odległość pomiędzy ostrzami.
8) Wykonać pomiar czasu 10 do 20 drgań dla każdej z osi. Porównać te czasy.
9) Przesunąć środkową soczewkę i sprawdzić czy zmniejszyła się różnica pomiędzy czasami. Jeśli nie przesunąć soczewkę w drugą stronę notując każdorazowo jej płożenie, czas drgań i według, której osi wykonaliśmy pomiar.
10) Kontynuować zmiany aż różnica czasów będzie mniejsza niż 1%.
11) Zanotować końcowe wyniki.

3 Opracowanie wyników

1) Obliczyć przyspieszenie ziemskie na podstawie wzoru

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}(x_c - x_a) = \frac{4\pi^2}{T^2} l_{zredukowane} \qquad (10)$$

gdzie $l_{zredukowane} = (x_c - x_a)$ oznacza odległość pomiędzy ostrzami (okres drgań mierzony dla obu ostrzy jest taki sam)

2) Wyznaczyć niepewność l oraz niepewność T
3) Obliczyć niepewność złożoną przyspieszenia
4) Zapisać wynik zgodnie z regułami.

4 Alternatywny sposób pomiarów

1) Zmierzyć precyzyjnie odległość pomiędzy ostrzami.
2) Wykonać pomiar czasu 10 do 20 drgań dla każdej z osi. Porównać te czasy.
3) Soczewkę przesuwać systematycznie pomiędzy ostrzami o ustaloną wartość (np. 1 cm) wykonując każdorazowo pomiary czasu dla obu osi i notując położenie soczewki.

Opracowanie wyników:

4) Na wspólnym rysunku wykreślić zmierzone okresy dla obu ostrzy w funkcji położenia soczewki.
5) Dokonać interpolacji wyników i wyznaczyć punkt przecięcia obu linii.
6) Obliczyć odpowiadający punktowi przecięcia okres drgań i ocenić jego niepewność.
7) Obliczyć przyspieszenia grawitacyjne i jego niepewność złożoną

Pytania:

Dlaczego przy pomocy wahadła matematycznego nie można wyznaczyć dokładnie przyspieszenia ziemskiego?
Przedstaw zależność okresu drgań wahadła fizycznego w funkcji odległości od środka masy.
Wyjaśnij dlaczego dla pewnej odległości punktu zawieszenia od

Dodatek

Obliczanie niepewności złożonej przyspieszenia ziemskiego.

$$u_C(g) = \sqrt{\left(\frac{-8\pi^2}{T^3} l_{zredukowane} u(T)\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2}{T^2} u(l_{zredukowane})\right)^2} \quad (11)$$

Dla ułatwienia obliczeń powyższy wzór można przekształcić do postaci:

$$u_C(g) = \frac{4\pi^2}{T^2} l_{zredukowane} \sqrt{\left(-2\frac{u(T)}{T}\right)^2 + \left(\frac{u(l_{zredukowane})}{l_{zredukowane}}\right)^2} =$$

$$= g\sqrt{\left(-2\frac{u(T)}{T}\right)^2 + \left(\frac{u(l_{zredukowane})}{l_{zredukowane}}\right)^2} \quad (12)$$