



**ĆWICZENIE
10**

**SPRAWDZANIE PRAWA HOOKE'A I WYZNACZANIE
MODUŁU YOUNGA**

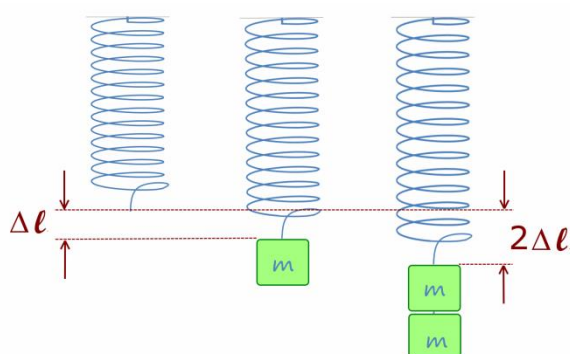
Cel ćwiczenia: Sprawdzenie prawa Hooke'a oraz wyznaczenie modułu Younga badanego metalu metodą pomiaru wydłużenia.

Zagadnienia: sprężystość, rodzaje odkształceń, prawo Hooke'a, moduł Younga, oddziaływania międzycząsteczkowe, naprężenie

1. Wprowadzenie

Jeśli ciało stałe poddane działaniu zewnętrznej siły odkształca się (np. wydłuża lub skręca), a po ustąpieniu tych sił, powraca do wyjściowej postaci, to mówimy, że takie ciało jest sprężyste lub że charakteryzuje się sprężystością. Ze sprężystością związane jest prawo Hooke'a, które w najprostszym ujęciu mówi, że odkształcenie ciała jest proporcjonalne do naprężenia. Zakres stosowności prawa Hooke'a oraz odpowiednie formuły dla podstawowych odkształceń zostaną podane w dalszej części.

Najprostszym przykładem sytuacji opisywanej prawem Hooke'a jest rozciąganie sprężyny, gdzie przyłożenie dwa razy większej siły rozciągającej skutkuje dwa razy większym rozciągnięciem (patrz rys.1).



Rys.1. Przykład proporcjonalności odkształcenia i przyłożonej siły

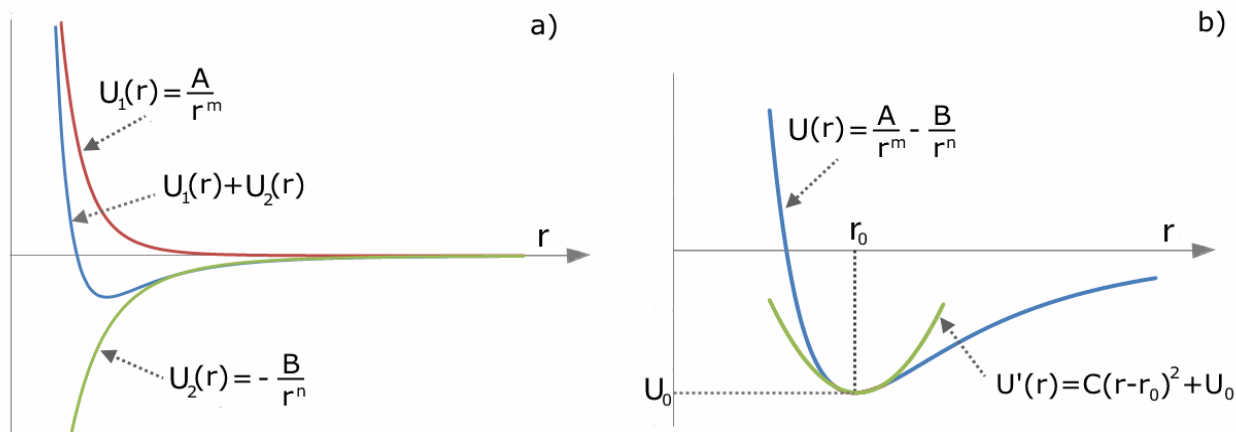
Po usunięciu zewnętrznej siły odkształcającej, sprężyna powraca do pierwotnego kształtu. Podobnie dzieje się w wielu innych sytuacjach, w szczególności przy niewielkim rozciąganiu ciał stałych takich jak stalowy drut. Wynika to z działania wewnętrznych sił sprężystości. Aby je opisać trzeba rozpatrzeć mikroskopową budowę ciała.

Odształcenia ciała stałego

Każde ciało stałe jest zbudowane z atomów lub cząsteczek, pomiędzy którymi działają siły nazywane międzycząsteczkowymi. W przypadku wielu materiałów (np. metale, stopy) siły te są na tyle duże, że cząsteczki (atomy) układają się w sposób uporządkowany, tworząc regularną strukturę przestrzenną nazywaną siecią krystaliczną. Każda cząsteczka ma swoje położenie równowagi trwałej, wokół którego wykonuje niewielkie, zależne od temperatury drgania. Powstanie równowagi trwałej - i tym samym sieci krystalicznej - wynika z faktu, że pomiędzy każdymi dwiema cząsteczkami występują dwójakiego rodzaju siły: przyciągania oraz odpychania. Jedne i drugie zależą od odległości międzycząsteczkowej: jeśli dwie cząsteczki są zbliżane do siebie z dużej odległości, to początkowo w ich wzajemnym oddziaływaniu

przeważa siła przyciągania, następnie pojawia się taka odległość, przy której obie siły wzajemnie się znoszą, a przy dalszym zbliżeniu cząsteczek dominuje odpychanie (cząsteczki nie mogą zbliżyć się do siebie dowolnie blisko).

Z siłą odpychania związana jest energia potencjalna, która silnie wzrasta wraz ze zbliżaniem się cząstek. Natomiast z siłą przyciągania związana jest energia potencjalna, która maleje

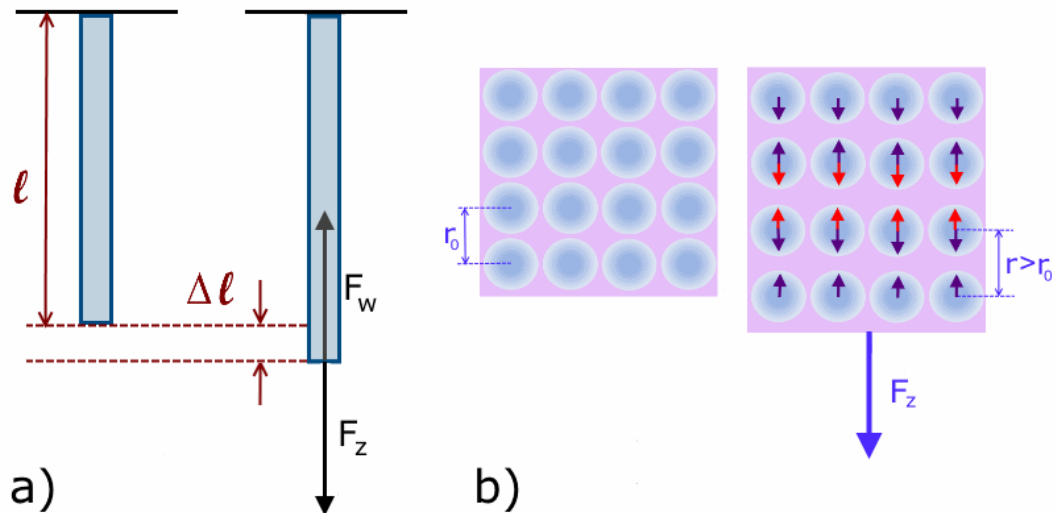


Rys. 2. a) Wykresy energii potencjalnych oddziaływania przyciągającego i odpychającego oraz ich sumy, b) wykres wypadkowej energii potencjalnej oraz jej przybliżenia funkcją kwadratową

wraz ze zbliżaniem się cząstek lub atomów. Poglądowe wykresy energii potencjalnych ukazane są na rys.2. Stałe A i B oraz wykładniki m i n opisujące energie potencjalne zależą od rodzaju cząsteczek tworzących kryształ (np. od tego, czy są spolaryzowane, czy nie), a dokładne ich wartości otrzymuje się w ramach formalizmu mechaniki kwantowej. Wykładnik m jest z reguły w przybliżeniu równy 8, a n w ogólności jest mniejszy od 6. Jeśli wykonamy wykres funkcji będącej sumą obu energii potencjalnych, tj. wykres wypadkowej energii potencjalnej, to okaże się, że w pewnym obszarze pojawia się „dołek”, z którym wiąże się minimum energii potencjalnej dla pewnej odległości r_0 między cząsteczkami – tam właśnie znoszą się siły przyciągania i odpychania (rys.2). „Dołek” ma kształt bardzo zbliżony do fragmentu paraboli w okolicy jej wierzchołka. Można więc powiedzieć, że w obszarze małych wychyleń z położenia r_0 energia potencjalna jest w przybliżeniu tej samej postaci, co energia potencjalna sprężystości ($U = kx^2/2$), a zatem cząsteczka wychylona z położenia równowagi będzie zachowywać się podobnie do ciała zaczepionego na sprężynie i wykonującego niewielkie drgania. Na cząsteczkę znajdującą się poza punktem równowagi będzie więc działać siła proporcjonalna do wielkości wychylenia i przeciwnie do niego skierowana, czyli skierowana w stronę położenia równowagi.

Przyjmijmy dla uproszczenia, że rozpatrywane ciało stałe jest idealnym kryształem zbudowanym z warstw cząsteczek oddalonych od siebie o odległość r_0 . Jeśli takie ciało w wyniku przyłożenia siły zewnętrznej wydłużyło się o Δl w kierunku prostopadłym do rozpatrywanych warstw, to w obrazie mikroskopowym oznacza to, że zwiększyły się odległości między warstwami: od r_0 do $r > r_0$, czyli $\Delta l = N|r - r_0|$, gdzie N jest liczbą warstw (rys. 3). Zwiększona wartość r w obrazie mikroskopowym oznacza wejście cząsteczek w obszar zwiększonego wzajemnego przyciągania. Przyciąganie to jest równoważone przyłożoną siłą zewnętrzną. W momencie gdy tę siłę usunie się, cząsteczki w wyniku przyciągania powrócą do położenia równowagi, a całe ciało powróci do wyjściowej postaci. W uproszczonym modelu

warstw siła zewnętrzna równoważona jest przez siły wewnętrzne działające na cząsteczki pierwszej warstwy ze strony drugiej warstwy (siły przyciągania międzycząsteczkowego – rys.3). Nie zawsze tak jest, że siły wewnętrzne zdołają zrównoważyć przyłożoną siłę zewnętrzną. W skrajnym przypadku dochodzi, jak wiadomo, do rozerwania ciała.



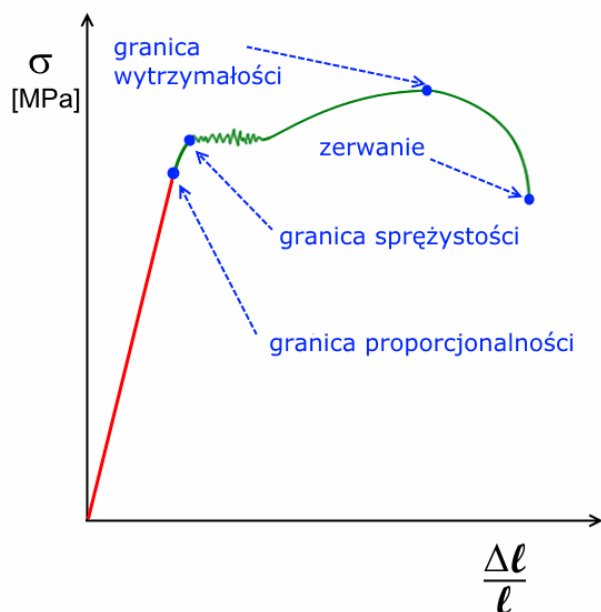
Rys. 3. a) Odształcenie typu rozciąganie, b) rozciąganie w obrazie mikroskopowym

Definiuje się **naprężenie** σ jako wielkość równą stosunkowi wartości siły F do powierzchni S , na którą ta siła działa:

$$\sigma = \frac{F}{S}. \quad (1)$$

Natomiast **odkształcenie** w rozpatrywanym przypadku rozciągania(ściskania) jest definiowane jako odkształcenie względne, czyli jako stosunek zmiany pewnego wymiaru do jego wartości przy braku naprężenia, w szczególności $\Delta l/l$ jest odkształceniem liniowym związanym ze zmianą długości ciała.

Na wykresie naprężenia (rys. 4) czerwonym kolorem zaznaczono jego początkowy fragment, gdzie zależność naprężenia od odkształcenia jest liniowa. Jest to początkowy zakres odkształceń, w którym spełnione jest prawo Hooke'a. Granica proporcjonalności odkształcenia i naprężenia nie jest jednoznacznie określona. Podobnie jak granica sprężystości, która może sięgać nieco większego naprężenia (w zakresie odkształceń sprężystych ciała powracają do wyjściowej postaci po ustaniu działania naprężenia). Przykładowo dla stali obie granice pokrywają się. Dla większych wartości naprężenia przebieg wykresu staje się nieliniowy, a odkształcenia niesprężyste: niewielkie zmiany naprężenia powodują znaczny wzrost odkształcenia, a ustąpienie naprężenia nie prowadzi do powrotu ciała do pierwotnej postaci (dzięki czemu np. metale można nadawać różne kształty bez wcześniejszego topienia). Istnieje granica wytrzymałości materiału, czyli takie naprężenie, powyżej którego następuje rozerwanie. Nagły spadek wartości naprężenia po przekroczeniu granicy wytrzymałości



Rys. 4. Wykres naprężenia

uwidoczony na rys.4 jest związany ze zmianą rozmiarów poprzecznych (przewężeniem), czego nie uwzględnia się w najprostszym opisie zjawiska.

Rodzaje odkształceń sprężystych i prawo Hooke'a

Wszelkie, różnorodne odkształcenia, jakim ulegają ciała pod wpływem działających na nie sił, można sprowadzić do trzech głównych rodzajów odkształceń: jednostronnego (liniowego) ściskania lub rozciągania, wszechstronnego (objętościowego) ściskania lub rozciągania oraz ścinania (odkształcenie kątowe).

Odkształcenie jednostronne (liniowe) występuje wtedy, gdy siły działają na dwie przeciwległe ściany ciała, prostopadłe do nich (na rys. 3 z jednej strony działa przyłożona siła F_z , a z drugiej taka sama co do wartości siła umocowania pręta). Odkształcenie to opisuje względna zmiana długości $\Delta l/l$, gdzie $\Delta l > 0$ dla rozciągania i $\Delta l < 0$ dla ściskania. Podobnie jak siła, naprężenie wywołujące tego typu odkształcenie ma kierunek prostopadły do powierzchni, zatem jest to **naprężenie normalne**. Prawo Hooke'a w tym przypadku ma następującą postać:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \sigma, \quad (2)$$

gdzie E jest modułem Younga. Wartość modułu Younga teoretycznie odpowiada takiej wartości naprężenia, przy której wystąpiłoby podwojenie długości badanego ciała. Przykładowo dla żelaza $E=216\text{MPa}$, a dla aluminium $71,6\text{MPa}$.

Odkształcenie wszechstronne (objętościowe) występuje wtedy, gdy na każdy element powierzchni ciała działa siła do niego prostopadła (przykładem takiej sytuacji jest ciało stałe zanurzone w wodzie, a zatem poddane z każdej strony działaniu dodatkowego ciśnienia). W tym przypadku za miarę odkształcenia bezwzględne umówiono się uważać przyrost objętości wzięty ze znakiem minus, $-\Delta V$ (czyli ubytek objętości). Odkształcenie ma dzięki temu przy ściskaniu wartość dodatnią, przeciwnie niż przy odkształceniu jednostronnym. Odkształceniem

względny nazywamy w tym przypadku stosunek $-\Delta V/V$ (gdzie V jest objętością ciała przy braku sił odkształcających) i prawo Hooke'a ma następującą postać:

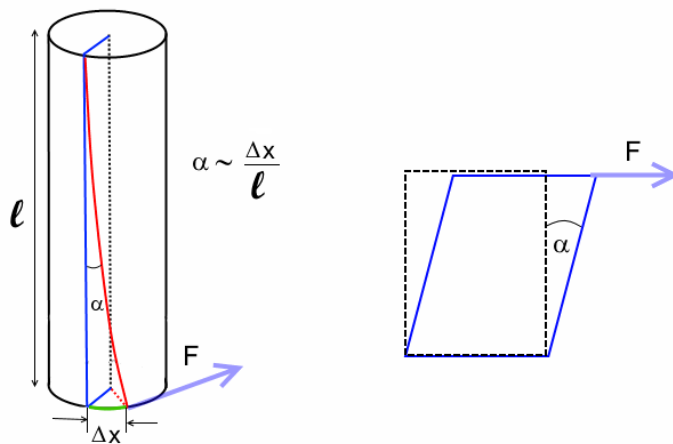
$$-\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{K} \sigma, \quad (3)$$

gdzie K jest modułem ścisłości. Przykładowe wartości modułu ścisłości to: dla żelaza 163MPa i dla aluminium 74,6MPa. Moduł ścisłości jest związany z prędkością rozchodzenia się dźwięku w danym materiale poprzez formułę $c = \sqrt{K/\rho}$, gdzie ρ jest gęstością materiału.

Ścinanie jest odkształceniem, które występuje wtedy, gdy działające na ciało siły są styczne do jego powierzchni (zatem występuje tutaj **naprężenie styczne**). Miarą odkształcenia bezwzględnego jest w tym przypadku kąt skręcenia ścianek - np. jeśli przy braku naprężenia dwie ścianki są do siebie prostopadłe, a przy działaniu naprężenia już nie, to powstała różnica jest miarą ścinania. W przypadku skręcania pręta odkształceniem będzie kąt związany z maksymalnym przemieszczeniem się punktów (rys.5). Odpowiednia formuła prawa Hooke'a jest następująca:

$$\alpha = \frac{1}{G} \tau, \quad (4)$$

gdzie G jest modułem sztywności (modułem Kirchhoffa), a τ naprężeniem ścinającym. Przykładowe wartości modułu sztywności: dla żelaza 79,5 MPa i dla aluminium 26,5 MPa.

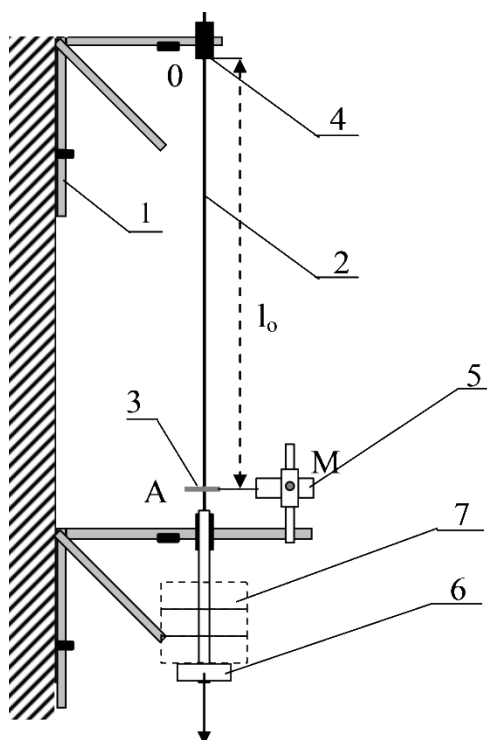


Rys. 5. Przykłady odkształcenia typu ścinanie z zaznaczonym kątem α opisującym jego wielkość

2. Zasada pomiaru i układ pomiarowy

Układ pomiarowy przedstawiony jest na rys.6. Elementem pomiarowym jest mikroskop oznaczony na rys.6 cyfrą 5. Dzięki niemu możliwe jest zaobserwowanie niewielkiego wydłużenia drutu sygnalizowanego przesunięciem wskaźnika A (3 - rys. 6). Zanim przejdzie się do zasadniczej części ćwiczenia, należy wykonać szereg pomiarów pomocniczych. Są to pomiary początkowej długości drutu, jego średnicy, średnicy wskaźnika oraz mas ciężarków. Średnicę wskaźnika mierzy się w milimetrach oraz w działkach mikroskopu. Pomiar w obu skalach ma służyć wyliczeniu przelicznika działek na milimetry, gdyż bezpośrednio wydłużenie drutu będzie mierzone w działkach mikroskopu.

W celu sprawdzenia prawa Hooke'a oraz wyznaczenia modułu Younga dokonuje się pomiarów wydłużenia drutu dla stopniowo zwiększanego obciążenia. Ciężarki o znanym ciężarze umieszczane są kolejno na szalce (6 – rys. 6), przy czym po każdym zwiększeniu obciążenia należy dokonać pomiaru wydłużenia drutu. Pomiaru tego dokonuje się za pomocą mikroskopu ustawiając krzyż celowniczy na raz wybranej krawędzi wskaźnika A (3 – rys. 6). Należy uważać, aby w trakcie pomiarów nie dotykać wskaźnika, w szczególności nie przekreślać go, gdyż zmiana jego położenia musi wynikać wyłącznie z wydłużenia drutu.



Rys. 6. Schemat układu pomiarowego

1. Konstrukcja mocująca
2. Badany drut
3. Wskaźnik A
4. Uchwyt mocujący drut
5. Mikroskop pomiarowy M
6. Obciążenie stałe (szalka)
7. Walce metalowe

W efekcie pomiarów i obliczeń otrzymujemy serię danych pozwalającą sporządzić wykres zależności $\Delta l/l$ od σ . Wykres analizujemy pod kątem zależności liniowej oraz wyznaczamy moduł Younga metodą regresji liniowej. Współczynnik kierunkowy linii trendu odpowiada – zgodnie z prawem Hooke'a – odwrotności modułu Younga.

3. Zadania do wykonania

A) Pomiary:

1. Długość początkową drutu zmierzyć przy miarce milimetrowej.
2. Średnicę drutu oraz średnicę wskaźnika zmierzyć śrubą mikrometryczną.
3. Zmierzyć średnicę wskaźnika w działkach mikroskopu.
4. Pomiary mas ciężarków wykonać na wadze laboratoryjnej zapisując dokładność jej wskazań.
5. Przy zwiększaniu naprężenia odczytywać przyrost długości drutu w działkach mikroskopu.

B) Opracowanie wyników:

1. Wyznaczyć średnią długość początkową drutu i jej niepewność.
2. Wyznaczyć średnią wartość średnicy drutu i jej niepewność.
3. Wyznaczyć średnią wartość średnicy wskaźnika w milimetrach i jej niepewność.
4. Wyznaczyć średnią wartość średnicy wskaźnika zmierzonej w działkach mikroskopu oraz jej niepewność.
5. Dla każdego obciążenia drutu obliczyć naprężenie wraz z niepewnością oraz odpowiednie względne wydłużenie drutu wraz z niepewnością.
6. Uzyskane wyniki zapisać w tabeli używając jednostek standardowych.
7. Wykonać wykres zależności względnego wydłużenia od naprężenia.
8. Metodą regresji liniowej wyznaczyć moduł Younga badanego drutu.
9. Wynik porównać z danymi tablicowymi oraz dokonać analizy niepewności pomiarowych.

4. Pytania:

1. Podać definicję odkształcenia sprężystego i niesprężystego. Wymienić podstawowe rodzaje odkształceń sprężystych.
2. Zdefiniować pojęcie naprężenia (jednostka). Co to jest naprężenie normalne i styczne?
3. Jakiego rodzaju siły międzycząsteczkowe działają w ciałach stałych?
4. Sformułować słownie i w postaci wzoru prawo Hooke'a dla rozciągania (ściskania).
5. Omówić zakres stosowalności prawa Hooke'a. Wyjaśnić pojęcie granicy proporcjonalności i sprężystości.
6. Narysować i objaśnić wykres naprężenia.
7. Podać sens fizyczny modułu Younga (jednostka) i sposób jego wyznaczenia.

opracowała Liliana Bujkiewicz