



**ĆWICZENIE
12**

**WYZNACZANIE MODUŁU SZTYWNOŚCI METODĄ
DYNAMICZNĄ**

Cel ćwiczenia: Wyznaczanie modułu sztywności drutu metodą sprężystych drgań obrotowych.

Zagadnienia: sprężystość, naprężenie ścinające, prawo Hooke'a, moduł sztywności, sprężyste drgania obrotowe (wahadło torsyjne), druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego, moment bezwładności, moment kierujący, związek kąta obrotu (wychylenia) z momentem sił; związek modułu sztywności z momentem kierującym

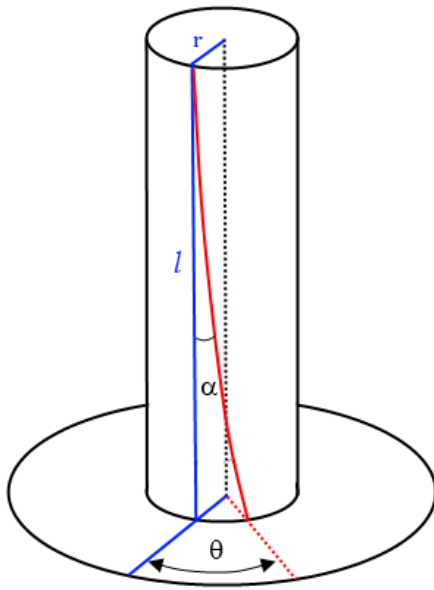
1. Wprowadzenie

Związane z tym ćwiczeniem zagadnienia takie jak naprężenie, odkształcenie sprężyste, rodzaje odkształceń zostały omówione we wprowadzeniu do ćwiczenia nr 10. Rozpatrzony zostanie szczególny przypadek sprężystego odkształcenia ścinającego, tzn. odkształcenia spowodowanego siłami przyłożonymi stycznie do powierzchni, na którą działają (czyli wywołującymi naprężenie ścinające) i które to odkształcenie znika po ustaniu działania tych sił (czyli jest sprężyste).

Rozpatrujemy pionowy drut o sztywno zamocowanym górnym końcu, a dolnym złączonym z płaskim krążkiem - tarczą, za pomocą której dokonujemy skręcenia drutu wokół jego osi symetrii. Sytuacja ta jest schematycznie przedstawiona na rysunku 1. Obróceniu tarczy o kąt θ odpowiada skręcenie drutu o kąt α . Powstałe naprężenie wynika z działania sił na dolną powierzchnię drutu. Jeśli odkształcenia są małe, to związek między naprężeniem, a odkształceniem – zgodnie z prawem Hooke'a – jest liniowy i przyjmuje postać:

$$\tau = G \alpha , \tag{1}$$

gdzie τ jest naprężeniem, G - modułem sztywności, α - kątem skręcenia. Gdy na układ przestanie działać siła zewnętrzna (w istocie zewnętrzny moment sił), to powstałe w wyniku odkształcenia naprężenie wewnętrzne spowoduje powrót do stanu początkowego. Jednak układ powracając do tego stanu zyska energię kinetyczną, dzięki której następnie skręci się w drugą stronę. Takie zjawisko będzie się powtarzać, a zatem jest to przykład ruchu drgającego, który wykonuje wahadło torsyjne. Dynamikę wahadła torsyjnego wykorzystuje się w tym ćwiczeniu.



Rys. 1. Schemat skręconego drutu

Analizowany układ będzie mógł być traktowany jako wykonujący kątowy ruch harmoniczny (przykład realizacji wahadła torsyjnego zwanego również wahadłem skrętnym), jeśli działający moment sił będzie postaci:

$$M = -\kappa \theta, \quad (2)$$

gdzie M – wypadkowy moment sił przyłożony do rozważanego układu, κ – moment kierujący, θ – kąt obrotu tarczy. W równaniu (2) zakładamy, że działający na układ moment sił jest proporcjonalny do kąta wychylenia, ale kierunek jego działania jest przeciwny do tego wychylenia. Za pomocą pełnej analogii dynamiki rozważanego układu i liniowego oscylatora harmonicznego, co przedstawia poniższa tabela, można zapisać wzór na okres drgań wahadła torsyjnego:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}}, \quad (3)$$

gdzie I jest momentem bezwładności układu.

Liniowy oscylator harmoniczny	Kątowy oscylator harmoniczny
Postać działającej siły $F = -kx$	Postać działającego momentu sił $M = -\kappa \theta$
Druga zasada dynamiki dla ruchu postępowego $ma = -kx$ $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$	Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego $I\varepsilon = -\kappa \theta$ $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0$
Częstość drgań układu $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Częstość drgań układu $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$

Okres drgań układu $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	Okres drgań układu $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$
Równanie ruchu $x = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$	Równanie ruchu $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$

Istnieje zależność między modułem sztywności G drutu a momentem kierującym κ , a tym samym okresem drgań wahadła torsyjnego. Zależność ta jest wyprowadzona poniżej.

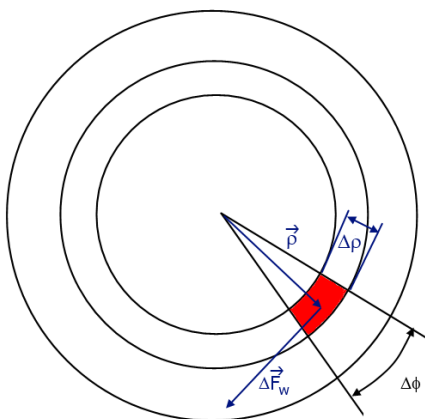
1.1 Wyprowadzenie wzoru wiążącego kąt wychylenia z wewnętrznym momentem sił

Punktem wyjścia jest równanie (1) opisujące związek odkształcenia z naprężeniem. Natomiast równaniem, które pozwoliło wyznaczyć okres drgań jest równanie (2) opisujące związek między kątem wychylenia a działającym momentem sił. Przedstawione poniżej przekształcenia prowadzą od jednego związku do drugiego. Naprężenie wiąże się bezpośrednio z działającym wewnętrznym momentem sił, a kąt skręcenia – z kątem wychylenia. Widoczny na rysunku 1 wspólny łuk dla obu kątów α i θ ma długość równą al i jednocześnie θr , zatem

$$\alpha = \frac{r}{l} \theta . \quad (4)$$

Siły wywołujące rozpatrywane naprężenie nie są prostopadłe do powierzchni, lecz równoległe do niej, a ponadto ich kierunek działania nie jest stały na tej powierzchni. Dla uproszczenia przyjmujemy, że wektory sił są styczne do okręgów o środku na osi symetrii drutu, mają stałą wartość na danym okręgu i wartość ta zmienia się wraz z odległością od środka. W takim przypadku układ najlepiej jest opisywać w zmiennych biegunowych. Możemy wyznaczyć siłę działającą na niewielki element powierzchni, który w tych zmiennych zapisuje się w postaci $\rho\Delta\rho\Delta\phi$ - sytuację tę przedstawia rys.2.

Na podstawie definicji naprężenia jako ilorazu przyłożonej siły do powierzchni oraz zauważając,



Rys. 2. Skręcenie drutu w przekroju poprzecznym

że formuła (4) stosuje się również dla promieni $\rho < r$ pierścieni wewnętrznych oraz uwzględniając równanie (1), siłę działającą na wybrany element powierzchni można zapisać następująco

$$\Delta F_w = \tau \cdot \Delta S \cong \tau \cdot \rho \Delta \rho \Delta \varphi = G\alpha \cdot \rho \Delta \rho \Delta \varphi = G \frac{\rho}{l} \theta \cdot \rho \Delta \rho \Delta \varphi = G \frac{\rho^2}{l} \theta \Delta \rho \Delta \varphi . \quad (5)$$

(Pole zaznaczonego elementu powierzchni ΔS jest w przybliżeniu równe iloczynowi szerokości pierścienia i długości wyciętego łuku, czyli iloczynowi $\Delta \rho$ oraz $\rho \Delta \varphi$, gdzie $\Delta \varphi$ jest kątem mierzonym w radianach.)

Ponieważ wektor siły skierowany jest prostopadle do wektora promienia, to wartość odpowiedniego momentu siły przyłożonego do wybranego fragmentu powierzchni drutu, jest równa:

$$\Delta M = \Delta F_w \cdot \rho = G \frac{\rho^3}{l} \theta \Delta \rho \Delta \varphi . \quad (6)$$

Dla każdego elementu powierzchni składającego się na pierścień o promieniu ρ i szerokości $\Delta \rho$ moment siły co do wartości będzie taki sam, zatem można posumować elementy powierzchni $\rho \Delta \rho \Delta \varphi$ po całym pierścieniu i w powyższym równaniu zastąpić je jego polem równym $2\pi \rho \Delta \rho$ (co odpowiada wykonaniu całkowania po φ w granicach od 0 do 2π):

$$\Delta M_p = G \frac{2\pi \rho^3}{l} \theta \Delta \rho . \quad (7)$$

Jak widać wkład do całkowitego momentu sił ΔM_p przyłożonego do pierścienia o promieniu ρ zależy od tej wielkości. Zatem w celu wyliczenia całkowitego momentu sił przyłożonego do drutu należy wykonać całkowanie po ρ w granicach od 0 do r :

$$M = G \frac{2\pi \theta}{l} \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{G\pi r^4}{2l} \theta . \quad (8)$$

Wartość momentu sił wewnętrznych – jak pokazuje wzór (8) – zależy liniowo od kąta wychylenia θ . Ponadto równanie należy uzupełnić o znak minus, co najprościej uzasadnić w ten sposób, że wewnętrzny moment sił przeciwdziała wzrostowi kąta wychylenia.

1.2 Związek modułu sztywności z momentem kierującym

Ostatecznie związek między kątem wychylenia θ a wewnętrznym momentem sił M uwzględniający moduł sztywności G drutu jest następujący:

$$M_w = - \frac{G\pi r^4}{2l} \theta , \quad (9)$$

z którego wynika, że moment kierujący

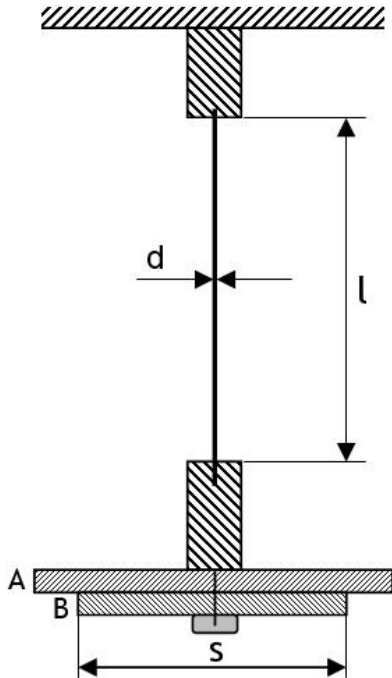
$$\kappa = G\pi r^4 / 2l , \quad (10)$$

a zatem na podstawie równania (3) okres drgań wahadła torsyjnego jest równy:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2I}{\pi r^4 G}} . \quad (11)$$

Powyższy wzór jest podstawą zasady pomiarów opisanych w następnym punkcie.

2. Zasada pomiaru i układ pomiarowy



Rys. 3. Schemat układu pomiarowego

d – średnica drutu

l – długość drutu

A – tarcza stała układu

B – tarcza dodatkowa

s – średnica tarczy B

Układ pomiarowy przedstawiony jest na rysunku 3, na którym widoczne są złączone dwie tarcze. Układ najpierw z jedną tarczą, a następnie z dwiema wprowadzany jest w ruch harmoniczny polegający na ruchu obrotowym w jedną i drugą stronę wokół osi symetrii układu. Dzięki pomiarom okresów drgań obu wahadeł torsyjnych można wyeliminować z równań trudną do wyznaczenia wielkość momentu bezwładności układu I_u (bez dodatkowej tarczy), natomiast moment bezwładności dodatkowej tarczy można wyznaczyć przyjmując, że jest to jednorodny krążek o promieniu R i masie m , wtedy $I = \frac{1}{2}mR^2$ [kg·m²]. Równanie (11) podniesione do kwadratu i zapisane dla obu przypadków przyjmie formy:

$$T_1^2 = 8\pi \frac{l I_u}{r^4 G}, \quad (12)$$

$$T_2^2 = 8\pi \frac{l(I_u + I)}{r^4 G}. \quad (13)$$

Eliminując z powyższych równań moment bezwładności I_u oraz wstawiając formułę na moment bezwładności dodatkowej tarczy otrzymuje się ostatecznie wzór na moment sztywności:

$$G = \frac{4\pi m R^2 l}{r^4 (T_2^2 - T_1^2)}. \quad (14)$$

Podczas wykonywania ćwiczenia mierzone będą nie promienie, lecz średnice d i s (rys.3), zatem wzór (14) przyjmie postać:

$$G = \frac{16\pi ms^2 l}{d^4(T_2^2 - T_1^2)}. \quad (15)$$

3. Zadania do wykonania

W celu wyznaczenia modułu sztywności należy wykonać pomiary: masy i średnicy dodatkowej tarczy, długości i średnicy drutu oraz okresów drgań układu bez dodatkowej tarczy oraz z zamocowaną dodatkową tarczą.

A. Pomiary:

1. Pomiar masy wykonać na wadze laboratoryjnej zapisując dokładność jej wskazań.
2. Długość drutu zmierzyć przymiarem milimetrowym.
3. Pomiar średnicy tarczy wykonać suwmiarką.
4. Pomiar średnicy drutu wykonać śrubą mikrometryczną w różnych miejscach.
5. Za pomocą stopera zmierzyć czas trwania wybranej liczby n pełnych wahaní układu w obu przypadkach: bez dodatkowej tarczy i z zamontowaną dodatkową tarczą.

B. Opracowanie wyników:

1. Wyznaczyć średnią wartość średnicy tarczy dodatkowej i jej niepewność.
2. Wyznaczyć średnią wartość średnicy drutu i jej niepewność.
3. Obliczyć średnie wartości czasów t_1 i t_2 i wyznaczyć ich niepewności.
4. Wyznaczyć moduł sztywności G drutu wraz z niepewnością.
5. Wynik porównać z danymi tablicowymi oraz dokonać analizy niepewności pomiarowych.

4 Pytania:

- 1) Podać definicję odkształcenia sprężystego.
- 2) Zdefiniować pojęcie naprężenia (jednostka). Jaki jest kierunek działania siły w stosunku do powierzchni w przypadku naprężenia ścinającego?
- 3) Zapisać w postaci wzoru oraz omówić prawo Hooke'a dla skręcenia.
- 4) Opisać wahadło torsyjne. Omówić ruch wykonywany przez wahadło.
- 5) Napisać II zasadę dynamiki dla drgań obrotowych. Podać związek między momentem kierującym, momentem bezwładności a okresem drgań układu.
- 6) Przedstawić sposób wyznaczania modułu sztywności przy pomocy wahadła torsyjnego.
- 7) Omówić dynamikę prostych drgań harmoniczných (drgania nietłumione oscylatora harmonicznego).