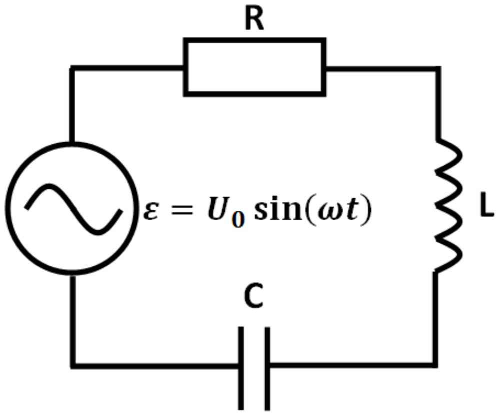
ĆWICZENIE 54	BADANIE ZJAWISKA REZONANSU ELEKTROMAGNETYCZNEGO

Cel ćwiczenia: wykreślenie charakterystyk prąd-częstotliwość szeregowych obwodów RLC, wyznaczenie częstości rezonansowych i współczynników dobroci badanych obwodów, wyznaczenie indukcyjności wykorzystywanych cewek.
Zagadnienia: prąd przemienny, obwód RLC, zjawisko rezonansu, dobroć układu.

1 Wprowadzenie

Zjawisko rezonansu występuje w wielu układach poddanych działaniu okresowego wymuszenia. Objawia się znaczącym wzrostem amplitudy odpowiedzi układu dla częstotliwości wymuszenia odpowiadających częstotliwościom własnym układu.
Najbardziej znanym rodzajem rezonansu jest rezonans mechaniczny, kiedy wymuszenie występuje w postaci zewnętrznej siły, a odpowiedzią układu jest wychylenie z położenia równowagi, które w skrajnych przypadkach może prowadzić nawet do zniszczenia obiektu. Przykładem może być kryształowy kieliszek, który pęka pod wpływem dźwięku o wysokiej częstotliwości. Zjawisko rezonansu odpowiedzialne jest też za zakaz maszerowania zwartych kolumn pieszych po mostach, aby nie wzbudzać nadmiernych drgań. Z mostem związany jest najsłynniejszy przypadek destrukcyjnej siły rezonansu, gdy most drogowy w Tacoma rozpadł się pod wpływem wiatru (do obejrzenia http://youtu.be/3_AOvGOu3Dw).
Analogiczne zjawisko występuje również w obwodach RLC, czyli składających się z rezystorów, cewek magnetycznych i kondensatorów, zawierających źródło napięcia przemiennego. Najprostszy przykład szeregowego obwodu RLC przedstawiony jest na rysunku 1.



Rys. 1 Szeregowy układ RLC.

Aby obliczyć prąd *i(t)* płynący w obwodzie należy skorzystać z II prawa Kirchhoffa, które dla przypadku rozważanego obwodu sprowadza się do równania

$$u_R(t) + u_C(t) = \varepsilon_L(t) + \varepsilon(t)\,, \qquad (1)$$

czyli suma spadków napięć na rezystorze $u_R(t)$ i kondensatorze $u_C(t)$ równa jest sumie sił elektromotorycznych wygenerowanych na cewce $\varepsilon_L(t)$ i pochodzących od źródła $\varepsilon(t)$. Spadek napięcia na rezystorze dany jest prawem Ohma

$$u_R(t) = R \cdot i(t), \tag{2}$$

Aby wyliczyć spadek napięcia na kondensatorze należy skorzystać ze wzoru łączącego pojemność kondensatora *C,* chwilowy ładunek na nim zgromadzony $q(t)$ oraz przyłożone do niego napięcie $u_C(t)$.

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C}, \tag{3}$$

Chwilowy ładunek zgromadzony na okładkach kondensatora zależy od prądu płynącego w obwodzie

$$q(t) = \int i(t)\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Podstawiając tę zależność do poprzedniego równania otrzymuje się

$$u_C(t) = \frac{\int i(t)\mathrm{d}t}{\mathrm{C}}. \tag{5}$$

Siła elektromotoryczna generowana przez prąd zmienny płynący przez cewkę, zgodnie z prawem samoindukcji, wynikającym z prawa Faradaya, równa jest

$$\varepsilon_{\mathrm{L}}(t) = -L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{6}$$

gdzie *L* to indukcyjność cewki. Z kolei czasowa zależność napięcia źródła dana jest wzorem

$$\varepsilon(t) = U_0\sin(\omega t), \tag{7}$$

gdzie U_0 to amplituda napięcia, a ω to częstość kołowa źródła, powiązana z jego częstotliwością przez zależność

$$\omega = 2\pi f. \tag{8}$$

Po podstawieniu do II prawa Kirchhoffa uzyskuje się równanie

$$R \cdot i(t) + \frac{\int i\mathrm{d}t}{\mathrm{C}} = -L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + U_0\sin(\omega t). \tag{9}$$

W celu znalezienia rozwiązania tego równania, tzn. znalezienia zależności czasowej natężenia prądu *i* płynącego w obwodzie, należy je najpierw uporządkować. W pierwszym kroku należy przenieść wyrazy zależne od natężenia na lewą stronę równania

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + R \cdot i(t) + \frac{\int i(t)\mathrm{d}t}{C} = U_0\sin(\omega t). \tag{10}$$

Następnie należy zróżniczkować równanie obustronnie

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{i(t)}{\mathrm{C}} = U_0\omega\cos(\omega t), \tag{11}$$

oraz podzielić przez *L*

$$\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{CL}i(t) = \frac{U_0\omega}{L}\cos(\omega t). \tag{12}$$

Otrzymane równanie jest niejednorodnym liniowym równaniem różniczkowym drugiego stopnia o stałych współczynnikach. Rozwiązanie takiego równania nie jest skomplikowane, a odpowiednią teorię można znaleźć w podręcznikach matematyki. Zanim jednak podane zostanie rozwiązanie, rozważone zostanie pozornie zupełnie inne zagadnienie, czyli ruch harmoniczny masy przyczepionej do sprężyny pod wpływem zewnętrznej siły okresowej, w ośrodku tłumiącym. Dynamiczne równanie ruchu w takim przypadku (tłumiony oscylator harmoniczny) przyjmuje postać

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0{}^2x(t) = A\cos(\omega t), \qquad (13)$$

gdzie $x(t)$ to wychylenie z położenia równowagi, b to współczynnik tłumienia, ω_0 to kołowa częstość własna układu, A – amplituda siły wymuszającej, ω - częstość kołowa siły wymuszającej. Porównanie obydwu równań prowadzi do wniosku, że różnią się one jedynie współczynnikami i rozwiązanie jednego z nich musi być również rozwiązaniem drugiego. Dla tłumionego oscylatora harmonicznego z siłą wymuszającą, rozwiązaniem jest zależność położenia od czasu opisująca drgania okresowe

$$x(t) = x_R\sin(\omega t + \varphi), \qquad (14)$$

o pewnej fazie początkowej φ, z amplitudą wychyleń x_R zależną od częstości kołowej siły wymuszającej w sposób następujący

$$\mathrm{x_R} = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(b\omega)^2}}. \qquad (15)$$

Przeliczając odpowiednio współczynniki na przypadek obwodu RLC

$$\mathrm{b} = \frac{\mathrm{R}}{L}, \qquad (16)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{CL}, \qquad (17)$$

$$\mathrm{A} = \frac{U_0\omega}{L}, \qquad (18)$$

otrzymujemy zależność czasową natężenia prądu w obwodzie postaci

$$i(t) = I_0\sin(\omega t + \varphi), \qquad (19)$$

z amplitudą I_0 zależną od częstości kołowej źródła w sposób następujący

$$\mathrm{I_0} = \frac{\mathrm{U_0}}{\sqrt{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2+R^2}}. \qquad (20)$$

Wykres powyższej zależności przedstawiono na Rys. 2.

Amplituda I_0 dla pewnej częstości kołowej, nazywanej częstością rezonansową ω_R, uzyskuje maksimum I_R. Analiza powyższego równania prowadzi do wniosku, że I_0 będzie największe, gdy mianownik będzie najmniejszy. Warunek minimalizacji mianownika prowadzi do równania

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \qquad (21)$$

Jego rozwiązanie pozwala określić kołową częstość rezonansową

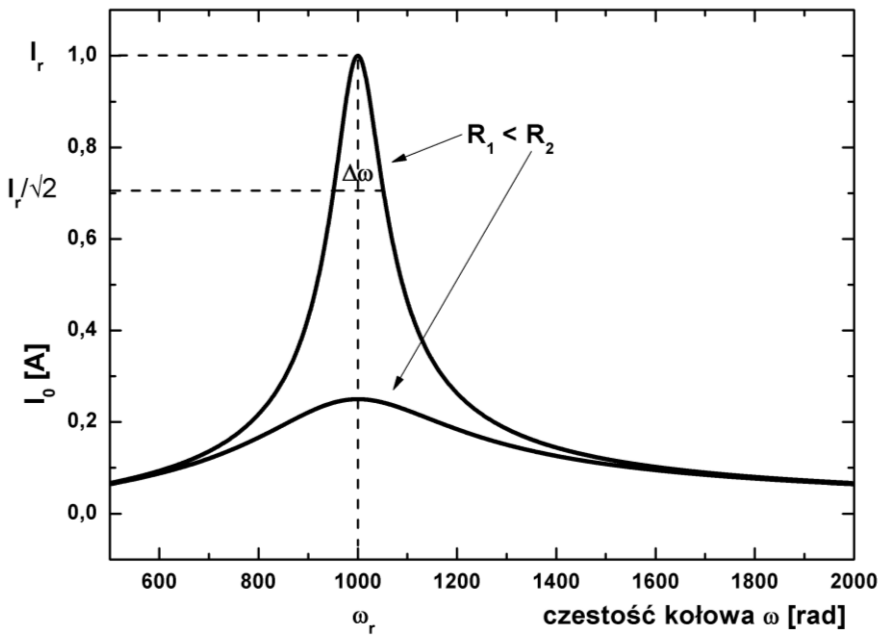
$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{CL}}, \qquad (22)$$

i odpowiadająca jej częstotliwość rezonansową

$$f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL}}. \qquad (23)$$

Warto zauważyć, że dla częstotliwości rezonansowej amplituda natężenia prądu zależy wyłącznie od rezystancji i amplitudy napięcia na źródle

$$I_r = \frac{U_0}{R}. \qquad (24)$$



Rys. 2 Zależność amplitudy natężenia prądu (I_0) od częstości kołowej źródła napięcia (ω) w szeregowym obwodzie RLC.

Szerokość krzywej rezonansowej na wysokości $I = \frac{I_r}{\sqrt{2}}$, oznaczona jako $\Delta\omega$, jest zależna od dobroci układu Q, bezwymiarowej wielkości opisującej stosunek energii E zmagazynowanej w układzie (w cewce i kondensatorze) podczas jednego okresu $T_\mathrm{r} = \frac{2\pi}{\omega_r}$, do strat energii ΔE na ciepło wydzielone przez rezystor, określonej wzorem

$$Q = 2\pi\,\frac{E}{\Delta E}\,. \tag{25}$$

Dobroć układu można wyrazić również przy pomocy zależności wiążących ją z parametrami układu RLC - jest ona odwrotnie proporcjonalna do rezystancji R,

$$Q = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r C R}\,, \tag{26}$$

lub z kształtem krzywej rezonansowej - wyrażona jest wtedy przez stosunek częstości rezonansowej ω_r do szerokości krzywej $\Delta\omega$, wpływa więc zasadniczo na stromość krzywej

$$Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega}\,. \tag{27}$$

Eksperymentalnie najłatwiej wyznaczyć dobroć układu mierząc stosunek napięcia na kondensatorze U_C (lub cewce U_L) przy częstotliwości rezonansowej do amplitudy napięcia źródła U_0

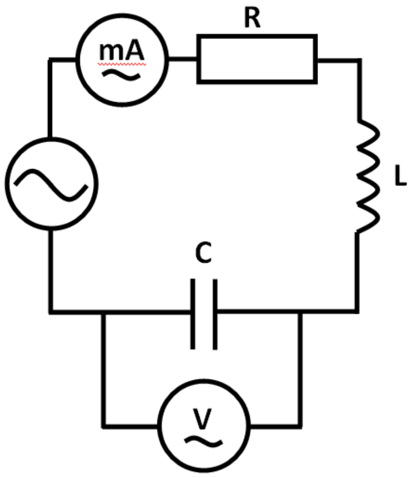
$$\mathrm{Q} = \frac{U_C}{U_0} = \frac{U_L}{U_0}\ . \tag{28}$$

Jak pokazano powyżej, odpowiedź układu zawierającego szeregowe połączenie rezystora, kondensatora i cewki, czyli natężenie prądu w nim płynącego, silnie zależy od częstotliwości źródła. Dla pewnej częstotliwości, zwanej częstotliwością rezonansową, powiązanej z częstością kołową wzorem $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi}$, natężenie prądu jest największe. Dobierając odpowiednio elementy układu wpływać można również na dobroć układu Q, która określa jak stroma jest zależność natężenia prądu od częstotliwości, czyli jak selektywny jest układ. Cechy te czynią z układu RLC doskonały filtr częstotliwości. Jest on wykorzystywany np. w odbiornikach radiowych bądź telewizyjnych, gdzie przestrajanie parametrów układu (najczęściej pojemności kondensatora) prowadzi do wyboru wzmacnianej częstotliwości fali radiowej, czyli do wyboru konkretnej stacji radiowej/programu telewizyjnego.

2 Zasada pomiaru i układ pomiarowy

Układ pomiarowy służący do wyznaczenia krzywej rezonansowej przedstawony jest na Rys. 3. Układ zawiera:

- źródło napięcia, umozliwiające zmianę jego amplitudy i częstotliwości
- rezystor, kondensator i cewkę połączone szeregowo
- miliamperomierz prądu zmiennego, umożliwiający pomiar natężenia prądu w obwodzie
- woltomierz prądu zmiennego, umożliwiający pomiar napięcia na kondensatorze



Rys. 3 Schemat układu pomiarowego.

Pomiar składa się z dwóch etapów. Najpierw należy znaleźć częstotliwość rezonansową układu, obserwując zmiany natężenia prądu przy zmianie częstotliwości. Następnie zaprojektować pomiar właściwy tak, żeby dobrze odtworzyć kształt krzywej, czyli rozpocząć pomiary natężenia prądu w funkcji częstotliwości źródła dla częstotliwości wystarczająco odległej od częstotliwości rezonansowej oraz zagęścić punkty pomiarowe w okolicy rezonansu. Dodatkowo, w celu wyznaczenia dobroci układu, należy zmierzyć napięcie na kondensatorze dla częstotliwości rezonansowej. Pomiar powtórzyć dla kilku wartości *R*, *L* i *C*.

3 Zadania do wykonania

- Pomiar zależności natężenia prądu od częstotliwości źródła w szeregowym obwodzie RLC
- Wyznaczenie częstotliwości rezonansowej
- Wyznaczenie indukcyjności wykorzystanych cewek
- Wyznaczenie dobroci układu

Szczegółowa instrukcja wykonania ćwiczenia oraz opracowania wyników została przedstawiona w instrukcji wykonawczej ćwiczenia.

4 Pytania:

- Opisz zjawisko rezonansu
- Omów analogię między obwodem RLC, a oscylatorem harmonicznym
- Jak wygląda zależność natężenia prądu od częstości kołowej w szeregowym obwodzie RLC
- Jak częstotliwość rezonansowa w szeregowym obwodzie RLC zależy od pojemności kondensatora i indukcyjności cewki
- Czym jest dobroć obwodu RLC
- Podaj przykład wykorzystania zjawiska rezonansu elektromagnetycznego.

opracował Wojciech Rudno-Rudziński